

제7장 가상일

2019-06-04

Chap7-가상일

1

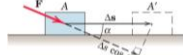
7.2 일

힘이 한 일

물체에 일정한 힘 F 가 작용하여 점 A 에서 A' 까지 벡터 Δs 만큼 이동, 벡터 Δs : 물체의 변위(displacement)



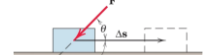
물체에 대하여 힘 F 가 한 일 U



$$U = (F \cos \alpha) \Delta s = F(\Delta s \cos \alpha)$$

U 는 스칼라이고, 변위 방향으로의 힘의 성분인 $F \cos \alpha$ 와 변위의 크기를 곱하여 한 일의 크기를 구한다. 변위 방향으로의 힘의 성분이 양(+)의 일, 변위 방향으로의 힘의 성분이 음(-)의 일

변위 방향으로의 힘의 성분이 변위와 반대방향으로 작용할 때



$$U = (F \cos \alpha) \Delta s = - (F \cos \theta) \Delta s$$

변위 방향으로의 힘의 성분이 양(+)의 일, 변위 방향으로의 힘의 성분이 음(-)의 일

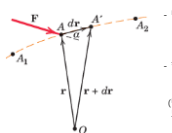
2019-06-04

Chap7-가상일

3

일의 정의의 일반화

힘 F 를 받아서 점 A_1 으로부터 점 A_2 까지의 경로를 따라서 움직이는 물체



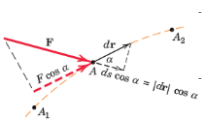
- 변위 dr 동안에 힘 F 가 한 일

$$dU = F \cdot dr$$

- 힘 F 의 크기를 F 로, 미분 변위 d 의 크기를 ds 로 표기

$$dU = F ds \cos \alpha$$

(변위 방향으로의 힘의 성분인 $F \cos \alpha$ 와 변위의 길이로 해석될 수도 있고, 또한 힘 방향으로의 변위의 성분인 $ds \cos \alpha$ 와 힘의 길이로 해석될 수도 있다.)



- F 와 ds 를 직교좌표계에서의 성분으로 표시하면

$$dU = (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

- 점 A_1 에서 점 A_2 로 이동하는 동안 힘 F 가 수행한 전체 일 U

$$U = \int_{A_1}^{A_2} F \cdot dr = \int_{A_1}^{A_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$U = \int F \cos \alpha ds$$

2019-06-04

Chap7-가상일

3

7.3 평형

가상일의 관점에서 평형 조건을 표현

집점의 평형

집점의 평형 위치로부터 떨어진 가상변위 δr 를 가정하면, 전체 가상일 δU :

$$\delta U = F_1 \cdot \delta r + F_2 \cdot \delta r + F_3 \cdot \delta r + \dots = \Sigma F \cdot \delta r$$

ΣF 와 δr 를 성분으로 표시:

$$\delta U = \Sigma F \cdot \delta r = (i \Sigma F_x + j \Sigma F_y + k \Sigma F_z) \cdot (i \delta x + j \delta y + k \delta z) = \Sigma F_x \delta x + \Sigma F_y \delta y + \Sigma F_z \delta z = 0$$

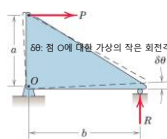
→ 평형 위치에서 가상일이 0의 값을 갖는다는 조건은 평형의 필요충분조건이다. 즉, $\delta U = 0$ 은 $F = 0$ 과 동일하다.

강체의 평형

- 그림과 같이 주어진 힘 P 가 작용할 때 물체의 변위 R 를 결정한다.
- 평형에 놓인 물체 내의 각 점에 대한 가상일은 0이므로, 전체 강체에 대한 가상일 $\delta U = 0$ 이므로:

$$-Pa \delta \theta + Rb \delta \theta = 0 \rightarrow Pa - Rb = 0$$

(이 식은 점 O 에 대한 모멘트의 평형방정식과 동일)



2019-06-04

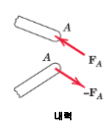
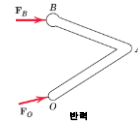
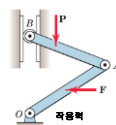
Chap7-가상일

5

여러 강체들로 구성된 이상적 강체계의 평형

- 이상적 강체계: 강체들 사이의 연결부위가 인장 또는 수축을 통하여 에너지를 흡수할 수 없으며, 또한 마찰이 매우 작아서 무시될 수 있는 시스템

- (1) 작용력(active force): 가상변위 동안에 가상일을 할 수 있는 외력
- (2) 반력(reactive force): 지지점에서 작용하는 힘 (지지점에서는 반력의 방향으로 가상변위가 발생하지 않음)
- (3) 내력(internal force): 부재 사이의 연결부위에서 작용하는 힘 (작용-반작용 법칙 → 연결부위에서 내력에 의한 일은 0)



2019-06-04

Chap7-가상일

6

가상일의 원리

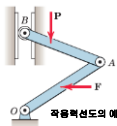
평형에 놓인 이상적 강체에서 구속조건과 일치하는 가상변위 동안에 작용력에 의하여 행해진 가상일은 0이다.
 $\delta U = 0$ (7.3) (구속이러한 평형 지지점의 운동에 대한 제한을 의미)

가상일의 방법을 사용하는 증명

- 1) 힘과 모멘트의 작용 고려하여 평형을 사용하는 방법에서 사용하는 것처럼 작용력 사이의 관계를 세우기 위해 이상적 강체계를 여러 구성 부제로 분리할 필요가 없게 된다.
- 2) 반력을 고려할 필요 없이 직접 작용력 사이의 관계를 결정할 수 있다.

작용력선도(active-force diagram)

- 가상일의 방법을 사용할 때는 고려하고 있는 시스템을 분리시키는 그림을 그려야 한다.
- $\delta U = 0$ 인 식에는 반력이 들어가지 않는다.
- 가상일의 방법에서 사용하는 그림(작용력선도)에서는 단지 작용력만이 도시된다.



2019-06-04

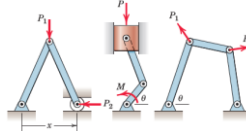
Chap7-가상일

7

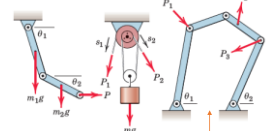
자유도(degree of freedom)

- 기계 시스템의 자유도(degree of freedom) 수: 그 시스템의 구성을 완전히 표현하는데 필요한 독립적인 좌표의 수

<1 자유도 시스템의 예>



<2 자유도 시스템의 예>



더 많은 링크를 더하면 자유도 수는 계속 증가

- 가상일의 원리 $\delta U = 0$ 은 자유도 수만큼 적용될 수 있다.
- (다른 모든 좌표값을 일정하게 유지한 상태에서, 하나의 독립된 좌표값만 변형시킴)

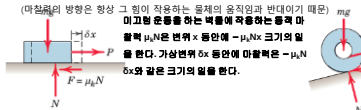
2019-06-04

Chap7-가상일

8

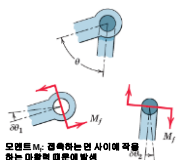
마찰이 있는 시스템

- 현실적 시스템(real system): 무시할 수 없을 정도의 미끄럼 마찰력이 존재하는 기계 시스템
- 외부 작용력에 의하여 수행된 일(+)의 일의 일부가 시스템의 운동에 동적 마찰력에 의하여 발생한 일의 형태로 발산
- 두 접촉하는 면들이 서로 미끄러질 때는 마찰력은 $\mu_k(-)$ 의 일을 수행 (마찰력의 방향은 항상 그 힘이 작용하는 물체의 움직임과 반대이기 때문)
- 마찰력 $\mu_k N$ 은 변위 δx 동안에 $-\mu_k N \delta x$ 크기의 일을 한다. 가상변위 δx 동안에 마찰력은 $-\mu_k N \delta x$ 와 같은 크기의 일을 한다.



구르는 바퀴에 작용하는 정적 마찰력은 만약 바퀴가 구르는 동안에 미끄러지지 않는다면 일을 하지 않는다.

전 계통된 두 부재 사이의 상대적인 회전 동안에 M_2 는 음의 일을 한다. 가상 변위 $\delta \theta_2$ 와 $\delta \theta_1$ 를 갖는 두 부재 사이의 상대적 가상변위 $\delta \theta$ 동안에 행해진 일(+)의 일은 $-M_2 \delta \theta_2 - M_1 \delta \theta_1 = -M_2(\delta \theta_2 + \delta \theta_1)$ 또는 $-M_2 \delta \theta$ 로 표현된다. 각각의 부재에서, M_1 는 상대적인 회전운동의 반대 방향이다.



모멘트 M_2 를 곱하는 것 사이에 작용하는 마찰력 때문에 발생

2019-06-04

Chap7-가상일

9

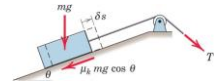
기계효율

- 마찰 때문에 에너지 손실이 발생하므로, 기계가 외부에 수행한 일은 입력된 일보다 항상 작다.

- 기계효율(mechanical efficiency) e : $e = \frac{\text{출력 일}}{\text{입력 일}}$

- 1 자유도를 갖고 균일한 방법으로 작동하는 단순한 기계의 기계효율은 가상변위 동안에 기계효율의 식에서 분자와 분모에 들어 있는 가상일을 구함으로써 결정할 수 있다.

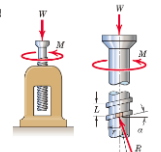
(예) 경사면을 따라서 위로 움직이는 블록



- 가상변위 δs 동안에 역을 움직이기 위하여 한 일: $mg \delta s \sin \theta$
- 입력 일: $T \delta s = (mg \sin \theta + \mu_k mg \cos \theta) \delta s$
- 경사면의 기계효율:

$$e = \frac{mg \delta s \sin \theta}{mg(\sin \theta + \mu_k \cos \theta) \delta s} = \frac{1}{1 + \mu_k \cot \theta}$$

(예) 나사적



- 나사의 작은 회전 $\delta \theta$ 동안에 입력 일: $M \delta \theta = W r \delta \theta \tan(\alpha + \phi)$
- 출력을 움직이는 데 필요한 외부 일: $W r \delta \theta \tan \alpha$
- 나사의 기계효율:

$$e = \frac{W r \delta \theta \tan \alpha}{W r \delta \theta \tan(\alpha + \phi)} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \phi)}$$

2019-06-04

Chap7-가상일

10

예제 7.1

핀으로 연결된 2개의 균일한 봉들이 각각 질량 m 과 길이 l 을 가지며 그림에 도시된 것처럼 지지되고 하중을 받고 있다. 주어진 힘 P 에 대하여 평형에서의 각도 θ 를 결정하라.

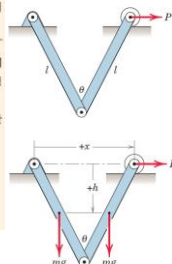
[풀이] 2개의 봉으로 구성된 시스템의 작용력선도를 그림에 나타내었다. 이 그림에는 각각의 봉의 무게 mg 와 힘 P 를 포함하였다. 시스템의 외부에 작용하는 다른 모든 힘들은 반박이며 가상변위 δx 동안에 일을 하지 않으므로 그림에 나타내지 않았다. 가상일의 원리에서는 구속조건과 일치하는 어떤 가상변위 동안에 외부 작용력에 의한 일이 0이 되어야 한다. 따라서, δx 동안에 가상일은 다음 식과 같이 된다.

$$\delta U = 0$$

$$P \delta x + 2mg \delta h = 0$$

이제 변수 θ 를 사용하여 이러한 2개의 가상변위(δx , δh)를 각각 표현하면,

$$x = 2l \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{이고} \quad \delta x = l \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta$$



2019-06-04

Chap7-가상일

11

▶ 마찬가지로,

$$h = \frac{l}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{이므로} \quad \delta h = -\frac{l}{2} \sin \frac{\theta}{2} \delta \theta$$

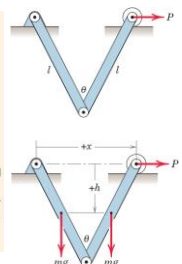
이들을 가상일의 식에 대입하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$Pl \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta - 2mg \frac{l}{4} \sin \frac{\theta}{2} \delta \theta = 0$$

위 식으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{2P}{mg} \quad \text{즉} \quad \theta = 2 \tan^{-1} \frac{2P}{mg}$$

힘과 모멘트의 작용을 이용하여 위의 결과를 얻기 위해서는 전체 구조를 분해하여 각각의 부재에 작용하는 모든 힘들을 고려해야 한다. 가상일의 방법을 사용하면 훨씬 간단히 답을 구할 수 있다.



2019-06-04

Chap7-가상일

12

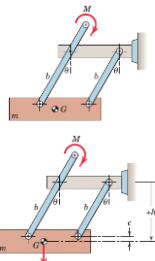
예제 7.2

그림에서 나타난 것처럼 원으로 연결된 2개의 서로 평행한 링크 중 1개의 끝단에 우력 M 을 가하여 2개의 링크에 매달린 질량 m 이 평형을 유지하고 있다. 링크들의 질량은 무시할 정도로 작으며 바퀴는 존재한다고 가정한다. 주어진 M 의 값에 대하여 수직선과 링크가 이루는 평행각도 θ 에 대한 표현식을 결정하라. 가상일의 방법과 함께, 힘과 모멘트의 평형을 이용한 다른 방법으로 풀이를 구하는 방법을 고려해보라.

|풀이| 작용력선도에 무게 mg 가 질량중심 G 에 작용하고 우력 M 이 링크의 끝단에 가해진 상태를 도시하였다. 각도 θ 가 변화하는 동안에 시스템에 일을 하는 더 이상의 다른 외부 작용력과 작용모멘트는 없다.

질량중심 G 의 수직 위치는 고정된 수평 기준선 아래쪽으로 거리 h 만큼 떨어져 있으며 그 값은 $h = b \cos \theta + c$ 이다. 무게 mg 방향으로 가상 움직임 δh 동안에 이루어진 일은,

$$\begin{aligned} +mg \delta h &= mg \delta(b \cos \theta + c) \\ &= mg(-b \sin \theta \delta \theta + 0) \\ &= -mg b \sin \theta \delta \theta \end{aligned}$$



2019-06-04

Chap7-가상일

13

예제 7.3

그림에서 도시된 대로 우력 M 이 작용할 때 수평 위치에 놓인 링크 OA 가 회전하지 않도록 하려고 한다. 이를 위하여 미끄럼 칼라(sliding collar)에 가하여 하는 힘 P 를 구하라. 단, 움직이는 각 부재의 질량은 무시한다.

|풀이| 시스템의 작용력선도를 스케치해보았다. 작용력선도에 나타나지 않은 다른 모든 힘들은 내력이거나 구속조건 때문에 일을 하지 못하는 반력들이다.

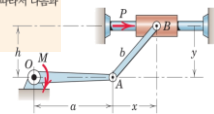
크랭크 OA 에 시계방향으로의 작은 회전각을 가상변위로 주고 그 결과로 발생하는 M 과 P 에 의한 가상일을 결정하려고 한다. 그 회전각은 점 A 를 크랭크의 수평 위치로부터 아래쪽으로 움직이게 하며 그 크기는 다음과 같다.

$$\delta y = a \delta \theta$$

위 식에서 δa 는 라디안 단위를 갖는다.

링크 AB 를 직각삼각형에서 길이가 일정한 빗변이라고 생각할 수 있다. 따라서 다음과 같은 식을 쓸 수 있다.

$$b^2 = x^2 + y^2$$



2019-06-04

Chap7-가상일

15

7.4 위치에너지와 안정성

탄성 위치에너지(elastic potential energy)

- 선형탄성 스프링의 스프링 상수(spring constant) 또는 스프링 강성(stiffness of spring) k 힘과 변위의 관계: $F = kx$
- 압축 x 에 대한 스프링의 탄성 위치에너지는 스프링에 행해진 전체 일과 같다.

$$V_e = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx$$

$$V_e = \frac{1}{2} kx^2 \quad (7.4)$$

- 스프링이 x_1 에서 x_2 로 압축되는 동안, 스프링에 행해진 일은 탄성 위치에너지의 변화와 같다.

$$\Delta V_e = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2)$$

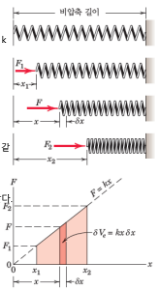
- 가상변위 δx 동안에, 스프링에 행해진 가상일은 탄성 위치에너지에서의 가상 변화와 같다.

$$\delta V_e = F \delta x = kx \delta x$$

- 비틀림 스프링의 탄성 위치에너지

$$M = k_t \theta \quad (k_t: \text{비틀림 강성(torsional stiffness)})$$

$$V_e = \frac{1}{2} k_t \theta^2 \quad (7.4a)$$



2019-06-04

Chap7-가상일

17

- 1 위 식에서 용의 부호는 양의 값 δa 에 대하여 용의 일이 수행되었음을 보여준다. 상수 a 는 고정된 값으로 그 변화량이 있을 수 없으므로 위 식에서 사라지게 된다.

시계방향으로 양의 부호를 갖는 θ 에 대하여, δa 도 시계방향일 때 양의 부호를 갖는다. 따라서, 시계방향의 우력 M 에 의하여 이루어진 일은 $+M \delta a$ 이다. 가상일의 방정식에 이를 대입하면 다음과 같다.

$$\delta U = 0 \quad M \delta \theta + mg \delta h = 0$$

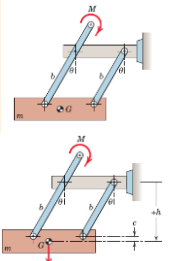
위의 두 식을 이용하면, 다음과 같이 된다.

$$M \delta \theta - mg b \sin \theta \delta \theta = 0$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{M}{mg b}$$

$\sin \theta$ 값이 1을 넘지 않기 때문에, 평형에서 M 의 값은 $mg b$ 를 초과하지 않는다.

힘과 모멘트의 평형을 이용한 해법에 포함될 수 있는 것들을 생각해보면 이 문제에서 가상일을 이용한 해법의 장점이 명확해진다. 전자의 방법에서는, 3개의 움직이는 부재 모두에 대하여 별도의 자유물체도를 그려야 하고 된 연결부에서는의 내부변력 모두를 고려해야 한다. 수평 기준선과 질량중심 사이의 거리 h 가 최종 풀이의 식에서는 빠진다고 하더라도, 이러한 과정을 수행하기 위하여 중간 과정에 h 를 식에 포함시켜야 한다. 따라서 이 문제에서 가상일의 방법을 사용할 때는 직접적으로 원인과 결과에만 관여하고 불필요한 물리량을 다룰 필요가 없게 된다.



2019-06-04

Chap7-가상일

14

위 식에서 미분을 취하면 다음 식을 얻는다.

$$0 = 2x \delta x + 2y \delta y \quad \text{즉} \quad \delta x = -\frac{y}{x} \delta y$$

따라서

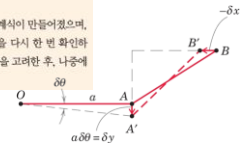
$$\delta x = -\frac{y}{x} a \delta \theta$$

이것, 가상일의 식은 다음과 같이 표기된다.

$$\delta U = 0 \quad M \delta \theta + P \delta x = 0 \quad M \delta \theta + P \left(-\frac{y}{x} a \delta \theta \right) = 0$$

$$P = \frac{Mx}{ya} = \frac{Mx}{ha}$$

가상일의 방법으로 작용력인 힘 P 와 우력 M 사이의 직접적인 관계식이 만들어졌으며, 이 과정에서 그 관계와 무관한 다른 힘들이 포함되지 않는다는 것을 다시 한 번 확인하였다. 힘과 모멘트의 평형식을 이용한 풀이에서는 초기에 모든 힘들을 고려한 후, 나중에 무관한 힘들을 제거하는 과정을 거치게 한다.



2019-06-04

Chap7-가상일

16

중력 위치에너지

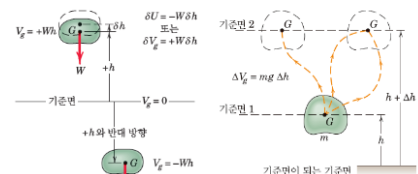
- 중력 위치에너지(gravitational potential energy) V_g

$$V_g = mgh \quad (7.5)$$

(h : 위치에너지 값이 0으로 정의되는 임의의 기준 평면으로부터의 위치)

- 중력 위치에너지의 가상 변화

$$\delta V_g = mg \delta h$$



2019-06-04

Chap7-가상일

17

2019-06-04

Chap7-가상일

18

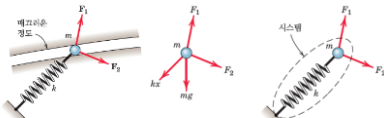
에너지방정식

$$\delta U - (\delta V_e + \delta V_g) = 0 \quad \delta U = \delta V \quad (7.6)$$

δU : 스프링 힘과 중력이 아닌 모든 작용력에 의하여 이루어진 일
 $-(\delta V_e + \delta V_g)$: 스프링과 중력에 의하여 이루어진 일
 $V = V_e + V_g$: 시스템의 총 위치에너지

작용력선도

- 시스템의 경계 내부에 탄성부재를 포함시킬 때, 탄성부재와 탄성부재가 연결된 움직이는 부재 사이에서의 상호작용력은 시스템의 내부에 존재



$$\text{식 (7.6): } \delta U = 0 \quad \text{식 (7.6): } \delta U = \delta V_e + \delta V_g = \delta V$$

가상일의 원리

평형 상태에 놓인 기계 시스템에 작용하는 (위치에너지 함수에서 고려되는) 변형과 스프링 힘을 제외한 모든 외부의 작용력에 의한 가상일은 구속과 일치하는 어떤 가상변위하에 대하여 그 시스템에서의 한순간 총 위치에너지가 불변성과 변화가 없다.

2019-06-04

Chap7-가상일

19

평형의 안정성(stability)

$$\delta U = 0 \text{ 일 때}$$

$$\delta(V_e + V_g) = 0 \quad \delta V = 0 \quad (7.7)$$

(총 위치에너지 V 가 정류값(stationary value)을 갖는 위치가 평형 위치)

- 1 자유도 시스템에 대하여, 평형조건 $\delta V = 0$ 은 수학적으로 식 (7.8)과 동일하다.

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad (7.8)$$

(총 위치에너지의 1차 도함수 값이 0일 때, 그 기계 시스템은 평형에 놓여 있다는 것을 의미)

- 식 (7.8)이 적용되는 조건

- 1) 안정적 평형(stable equilibrium): 총 위치에너지가 최소일 때
- 2) 불안정적 평형(unstable equilibrium): 총 위치에너지가 최대일 때
- 3) 중립적 평형(neutral equilibrium): 총 위치에너지가 일정할 때

평형	$\frac{dV}{dx} = 0$
안정	$\frac{d^2V}{dx^2} > 0$
불안정	$\frac{d^2V}{dx^2} < 0$



2019-06-04

Chap7-가상일

20

예제 7.4

질량이 10 kg인 실린더가 강성이 2 kN/m인 스프링에 의하여 매달려 있다. 이 시스템의 위치에너지 V 를 도식하고, 평형 위치에서 V 의 값이 최소임을 보여라.

[풀이] 이 예제에서 평형 위치는 스프링 힘과 무게 mg 의 값이 같을 때라는 것은 너무나 당연하다. 그러나 에너지의 관계를 간단히 예시하기 위하여 이러한 사실을 모르는 것으로 간주하고 이 예제를 풀도록 하겠다. 스프링 길이의 변화가 없는 곳을 위치에너지 값이 0인 기준점으로 선정하자.

임의의 위치 x 에서의 탄성 위치에너지의 값은 $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ 이며 중력 위치에너지의 값은 $-mgx$ 이다. 따라서 총 위치에너지의 값은 다음과 같다.

$$[V = V_e + V_g] \quad V = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

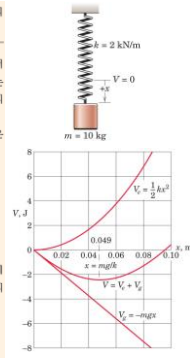
평행이 되기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\left[\frac{dV}{dx} = 0 \right] \quad \frac{dV}{dx} = kx - mg = 0 \quad x = mg/k$$

이 예제와 같이 단순한 경우에 평행이 안정적이라는 사실을 알고 있지만, 평행 위치에서 V 의 제2차 도함수의 부호를 구하면 이것이 입증된다. $d^2V/dx^2 = k$ 가 양의 부호를 가지므로, 평행이 안정적임이 입증되었다.

주어진 수치들을 대입하면 총(V) 단위를 갖는 위치에너지의 값은

$$V = \frac{1}{2}(2000\text{N/m}) - 10(9.81\text{N})$$



2019-06-04

Chap7-가상일

21

이로, 위 식에서 x 의 평행 위치를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x = 10(9.81)/2000 = 0.0490 \text{ m} \quad \text{즉} \quad 49.0 \text{ mm}$$

• x 의 여러 값에서 V 의 값을 계산하여 V - x 값을 그림처럼 도시하였다. V 의 최소값은 $x = 0.0490 \text{ m}$ 에서 발생하며 이때 $dV/dx = 0$ 이고 $d^2V/dx^2 > 0$ 이다.

2019-06-04

Chap7-가상일

22

예제 7.5

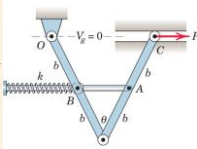
각각 질량 m 을 갖는 2개의 균일한 링크가 그림에 나타난 것처럼 서로 연결되고 구속되어 있다. 질량을 무시할 정도로 가벼운 막대기 점 A에 연결되어 있으며 점 B에서 피봇된 칼라(pivoted collar)를 관통하고 있다. 수평방향의 힘 P 의 작용과 함께 두 링크 사이의 각도 θ 가 증가함에 따라 점 A에 연결된 막대기 강성이 k 인 스프링을 압축하고 있다. 만약에 $\theta = 0$ 인 위치에서 스프링의 압축량이 0이라면, 각도 θ 에서 평형을 만드는 힘 P 를 결정하라.

[풀이] 도시된 그림은 주어진 시스템의 작용력선도에 해당된다. 스프링의 압축량 x 는 점 A가 점 B로부터 떨어진 거리와 같으며 그 값은 $x = 2b \sin \frac{\theta}{2}$ 이다. 따라서 스프링의 탄성 위치에너지는 다음과 같다.

$$[V_e = \frac{1}{2}kx^2] \quad V_e = \frac{1}{2}k(2b \sin \frac{\theta}{2})^2 = 2kb^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

편의상 지지점 O를 관통하는 위치를 중력 위치에너지가 0인 기준점으로 선정하면, V_g 에 대한 식은 다음과 같이 된다.

$$[V_g = mgh] \quad V_g = 2mg(-b \cos \frac{\theta}{2})$$



점 O와 점 C 사이의 거리는 $4b \sin \frac{\theta}{2}$ 이며, 따라서 P 에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta U = P \delta \left(4b \sin \frac{\theta}{2} \right) = 2Pb \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta$$

가상일의 식에서 다음을 얻게 된다.

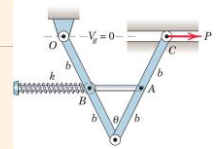
가상일의 식에서 다음을 얻게 된다.

$$[\delta U = \delta V_e + \delta V_g] \quad 2Pb \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta = \delta \left(2kb^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \delta \left(-2mgb \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ = 2kb^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta - mgb \sin \frac{\theta}{2} \delta \theta$$

위 식을 단순화하여 다음 식을 얻게 된다.

$$P = kb \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}mg \tan \frac{\theta}{2}$$

힘 P 가 주어질 때 평행이 되는 각 θ 의 양함수 해를 구하기는 어렵다. 그러나 θ 에 대한 두 항을 구하고, 그 값을 그래프로나 나타낸 것이 P 와 일치하도록 수치적 방법으로 컴퓨터를 이용하여 θ 의 해를 구할 수 있다.



2019-06-04

Chap7-가상일

23

2019-06-04

Chap7-가상일

24

예제 7.6

길이가 m 인 균일한 막대의 양쪽 끝이 각각 수평과 수직 가이드를 따라서 자유롭게 미끄러진다. 평형의 위치에서 안정조건을 검토하라. 단, $x=0$ 일 때, 강성이 k 인 스프링의 변형량은 0이다.

- ❶ **[풀이]** 전체 시스템은 스프링과 막대로 구성되어 있다. 아무런 외력도 존재하지 않기 때문에 주어진 그림은 작용력선도와 동일하다. x 축을 중력 위치에너지가 0인 기준점으로 선택하였다. 변위가 발생한 위치에서 탄성 및 중력 위치에너지는

$$V_s = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kb^2 \sin^2 \theta \quad \text{이고} \quad V_g = mgb \frac{b}{2} \cos \theta$$

이고 총 위치에너지는 다음과 같다.

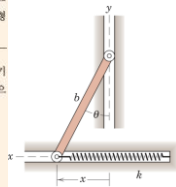
$$V = V_s + V_g = \frac{1}{2}kb^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}mgb \cos \theta$$

평형은 $dV/d\theta=0$ 에서 발생한다. 따라서

$$\frac{dV}{d\theta} = kb^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2}mgb \sin \theta = (kb^2 \cos \theta - \frac{1}{2}mgb) \sin \theta = 0$$

위 식에 대한 2개의 풀이는 다음 식으로 주어진다.

❷ $\sin \theta = 0 \quad \text{아} \quad \text{고} \quad \cos \theta = \frac{mg}{2kb}$



위의 두 평형 위치에 대하여 V의 제2차 도함수의 부호를 검토하여 안정성을 결정할 수 있다. 제2차 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\theta^2} &= kb^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \frac{1}{2}mgb \cos \theta \\ &= kb^2(2 \cos^2 \theta - 1) - \frac{1}{2}mgb \cos \theta \end{aligned}$$

- ❸ **[풀이]** $\sin \theta = 0, \theta = 0$ 인 경우

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\theta^2} &= kb^2(2 - 1) - \frac{1}{2}mgb = kb^2 \left(1 - \frac{mg}{2kb}\right) \\ &= k > mg/2b \text{ 일 때 양 (안정)} \\ &= k < mg/2b \text{ 일 때 음 (불안정)} \end{aligned}$$

따라서 만약 스프링의 강성이 충분히 크다면, 수직 위치에서 막대에 아무런 힘이 작용하

- ❹ 지 않고 있더라도 막대는 수직 위치로 되돌아 올 것이다.

- ❺ **[풀이]** $\cos \theta = \frac{mg}{2kb} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{mg}{2kb}$ 인 경우.

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kb^2 \left[2 \left(\frac{mg}{2kb} \right)^2 - 1 \right] - \frac{1}{2}mgb \left(\frac{mg}{2kb} \right) = kb^2 \left[\left(\frac{mg}{2kb} \right)^2 - 1 \right]$$

코사인 함수의 값은 1보다 작기 때문에, 이 값은 $k > mg/2b$ 경우로 국한된다. 이 경우에

- ❻ V의 2차 도함수는 음의 값을 갖는다. 따라서 풀이 1에서의 평형은 안정적일 수 없다. 만약 $k < mg/2b$ 라면, $0 < \theta < 90^\circ$ 사이에서 스프링이 평형상태를 유지하기에 너무 약하기 때문에 풀이 1의 답을 얻을 수 없다.

