

5

DISTRIBUTED FORCES

CHAPTER OUTLINE

5/1 Introduction

SECTION A CENTERS OF MASS AND CENTROIDS

5/2 Center of Mass

5/3 Centroids of Lines, Areas, and Volumes

5/4 Composite Bodies and Figures; Approximations

5/5 Theorems of Pappus

SECTION B SPECIAL TOPICS

5/6 Beams—External Effects

5/7 Beams—Internal Effects

5/8 Flexible Cables

5/9 Fluid Statics

5/10 Chapter Review

2019-04-18 Chap5-a 1

5/1 INTRODUCTION

하중

집중력(集中力, concentrated forces)

분포력(分布力, distributed forces)

점속면

2019-04-18 Chap5-a 2

분포하중의 종류

선분포(線分布, line distribution) $w = [N/m, lb/ft]$; 단위 길이 당의 힘

예) cable의 연속수직하중 등

(a)

2019-04-18 Chap5-a 3

면적분포(面積分布, area distribution ; 단위 면적 당의 힘) $1 Pa = [N/m^2], psi(\frac{lb}{ft^2})$

유체(流體, fluid 분야) : 압력(壓力, pressure) $1 kPa = 10^3 Pa, ksi = 10^3 psi$

고체 내부(固體內部) : 응력(應力, pressure) $1 MPa = 10^6 Pa$

(b)

2019-04-18 Chap5-a 4

2019-04-18 Chap5-a 5

체적분포(體積分布, volume distribution ; 단위 체적 당의 힘) $[N/m^3]$

체력(體力, body force)

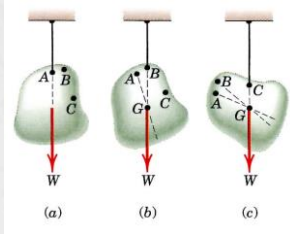
(c)

2019-04-18 Chap5-a 6

SECTION A CENTERS OF MASS AND CENTROIDS

5/2 CENTER OF MASS

Center of Gravity : 지구의 인력에 의한 균일하고 평행한 역장(力場)의 가정으로 유일한 중심이 존재하게 됨



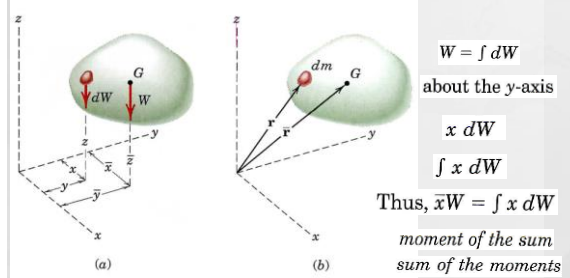
2019-04-18

Chap5-a

7

(수학적으로) 중심의 위치 결정 : Varinong's theorem 적용

임의의 축에 대한 중력의 합력 W의 모멘트는 물체의 미소 요소로 생각한 모든 질점에 작용하는 중력 dW의 같은 축에 대한 모멘트의 합과 같다.



2019-04-18

Chap5-a

8

중력중심의 좌표

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{W}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dW}{W}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dW}{W} \quad (5.1a)$$

- 중력가속도 g가 일정하지 않을 때: $W = mg$ 와 $dW = g dm$ 을 대입

질량중심의 좌표

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{m}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{m} \quad (5.1b)$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}$$

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m} \quad (5.2)$$

- 밀도 ρ가 균일하지 않을 때: $dm = \rho dV$ 를 대입

$$\bar{x} = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \rho dV}{\int \rho dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int z \rho dV}{\int \rho dV} \quad (5.3)$$

체적중심(도심)의 좌표

밀도가 균일하면 질량중심과 같다.

2019-04-18

Chap5-a

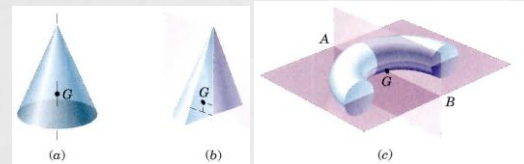
9

식(5-1b) ~ (5-3)에는 중력가속도 g의 표현이 없다. (< 균일하고 평행한 중력장 가정)

- 유일한 질량중심(center of mass) → 무게중심과 일치
- 중력이 없으면 무게중심은 의미가 없지만 유일한 질량중심은 있다.
- 질량중심은 동역학에서 중요하다.

*) 편리한 기준축 선정 : cartesian, cylindrical, polar, spherical

*) 대칭성(symmetry) 고려



2019-04-18

Chap5-a

10

5/3 CENTROIDS OF LINES, AREAS, AND VOLUMES

한 물체의 밀도 ρ가 전체적으로 일정할 때

식(5.3)에서 ρ를 적분기호 밖으로 빼어 낼 수 있으므로

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{\int dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{\int dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{\int dV}$$

가 되고, 이것을 도심(圖心, centroid)라 하며,

물리적인 성질이 제거되고 기하학적인 성질만 남아있는 상태이다.

- 물체의 밀도가 균일한 경우 도심은 질량중심과 같다.

2019-04-18

Chap5-a

11

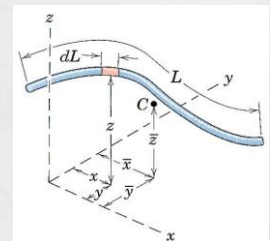
(a) 선(線, Lines) : 만일 ρ와 A가 막대의 길이를 따라 일정하다면

$$dm = \rho dV = \rho A dL, \quad m = \rho AL \text{ 가 되므로}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{\int dL}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{\int dL}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dL}{\int dL} \quad (5.4)$$

여기서 L : 길이, A : 단면적, ρ : 밀도

이며 가는 막대, wire등이 그 예들이다.



2019-04-18

Chap5-a

12

(b) 면적의 중심

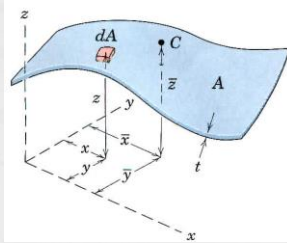
- 두께 t 가 작고 일정하며, 또한 일정한 밀도 ρ 를 가진 얇은 물체는 면적 A 로 볼 수 있다.

$$m = \rho t A, \quad dm = \rho t dA$$

- $\int x dA$: 면적(面積) 1차 모멘트 first moment of area

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int x dA}{A} \\ \bar{y} &= \frac{\int y dA}{A} \\ \bar{z} &= \frac{\int z dA}{A}\end{aligned}$$

(5.5)



2019-04-18

Chap5-a

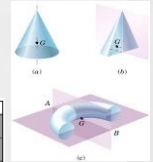
13

(c) 체적의 중심

- 체적 V , 밀도 ρ 인 물체 요소의 질량은 $dm = \rho dV$ 이다.

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V} \quad (5.6)$$

구분	x 좌표	y 좌표	z 좌표
질량	$\bar{x} m = \int x dm$	$\bar{y} m = \int y dm$	$\bar{z} m = \int z dm$
선분	$\bar{x} L = \int x dL$	$\bar{y} L = \int y dL$	$\bar{z} L = \int z dL$
면적	$\bar{x} A = \int x dA$	$\bar{y} A = \int y dA$	$\bar{z} A = \int z dA$
체적	$\bar{x} V = \int x dV$	$\bar{y} V = \int y dV$	$\bar{z} V = \int z dV$



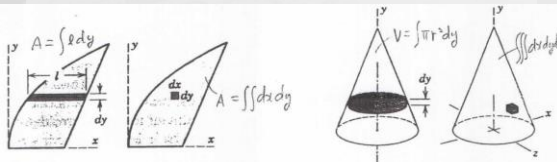
2019-04-18

Chap5-a

14

Choice of Element for Integration

(1) Order of Element.



2019-04-18

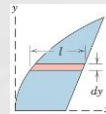
Chap5-a

15

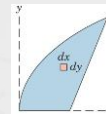
적분요소의 선정

① 적분 요소의 차수(order)

- 가능한 한 고차 요소보다 1차의 미분요소를 취하여, 도형 전체에 대한 적분을 단일 적분으로 하도록 한다.



단일 적분 → Good



2중 적분 필요 → Bad



단일 적분 → Good



3중 적분 필요 → Bad

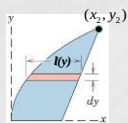
2019-04-18

Chap5-a

16

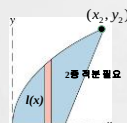
② 적분 구간의 연속성

- 가능한 한 한번 만에 연속 적분할 수 있는 미분요소를 선택



$$\int dA = \int_0^{y_2} l(y) dy$$

한 구간 적분 → Good



$$\int dA = \int_0^{x_1} l(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} l(x) dx$$

두 구간 적분 → Bad

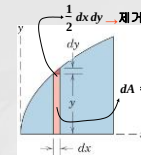
2019-04-18

Chap5-a

17

③ 미분 요소에서 고차항은 제거

- 고차항은 지차항에 비하여 크기가 매우 작으므로 항상 버린다.

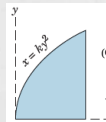


$$dA = y dx$$

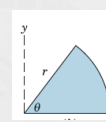
$$\int dA = \int \left(y dx + \frac{1}{2} dx dy \right)$$

④ 좌표계의 선정

- 도형의 경계와 잘 들어맞는 좌표계를 선택한다.

직각좌표계
(Cartesian coordinate)

$$\int dA = \int dx dy$$

극좌표계
(Polar coordinate)

$$\int dA = \int r dr d\theta$$

2019-04-18

Chap5-a

18

⑤ 적분시 미분요소의 좌표는 미분요소의 도심좌표를 사용

- 미분요소의 모멘트를 구할 때 모멘트길이를 미분요소의 도심 좌표를 사용한다.

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V} \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V} \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V}$$

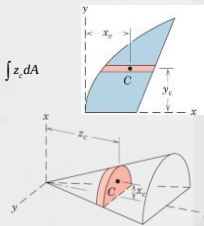
미분요소의 모멘트 = (모멘트길이) $\times$ (미분요소)

$$\int x dA, \int y dA, \int z dA$$

모멘트길이에 미분요소의 도심 좌표를 사용

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z_c dA}{A} \quad (5.5a)$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dV}{V} \quad \bar{y} = \frac{\int y_c dV}{V} \quad \bar{z} = \frac{\int z_c dV}{V} \quad (5.6a)$$



2019-04-18

Chap5-a

19

예제 5.1

원호의 도심. 그림과 같은 원호의 도심 위치를 구하라.

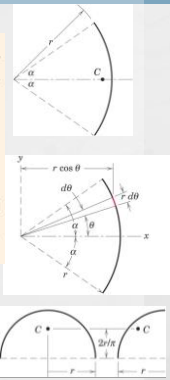
[풀이] 대칭축을 x축으로 잡아 $\bar{y}=0$ 이 되게 한다. 호의 미분요소를 극좌표로 표시하면
① 면 길이 $dL=r d\theta$ 이고 요소의 x좌표는 $r \cos \theta$ 이다.
식 (5.4)의 첫 식과 $L=2a$ 를 대입하면

$$[Lx = \int x dL] \quad (2ar)x = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \cos \theta) r d\theta$$

$$2ar\bar{x} = 2r^2 \sin \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

$2a = \pi$ 인 반원호에서는 $\bar{x}=2r/\pi$ 를 얻는다. 대칭에 의하여 1/4 원호에 대해서도 같은 결과를 적용할 수 있다.



2019-04-18

Chap5-a

20

예제 5.2

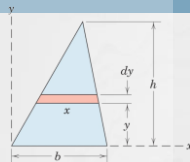
삼각형의 도심. 높이 h인 삼각형의 밑면에서부터 면적도심까지의 거리를 결정하라.

① [풀이] x축을 밑면과 일치시킨다. 미분 면적 $dA=x dy$ 를 한다. 삼각형의 밑은 $x/(h-y)=b/h$ 로부터 식 (5.5a)의 둘째 식을 적용하면

$$[A\bar{y} = \int y_c dA] \quad \frac{bh}{2} \bar{y} = \int_0^h y \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{bh^2}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{h}{3}$$

이는 삼각형의 다른 두 변을 새로운 밑면으로 삼고 그에 대한 높이를 생각해도 같은 결과가 된다. 따라서 도심은 중점들의 교차점에 놓여 있으며, 이는 각 변에서 이 끝까지의 거리는 밑면으로 삼은 변에 대한 삼각형 높이의 1/3이 되기 때문이다.



2019-04-18

Chap5-a

21

예제 5.3

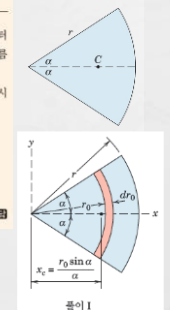
부채꼴의 도심. 꼭지점에 대한 부채꼴 면적의 도심 위치를 결정하라.

[풀이] x축을 대칭축으로 삼으면 $\bar{y}=0$ 이 된다. 그림과 같이 중심에서부터 부분 원형 고려형태의 요소를 이동시키므로써 총 면적을 고려할 수 있다. 고려의 반지름이 r_0 이고, 두께가 dr_0 이므로 면적은 $dA=r_0 d\theta dr_0$ 이다.
② 예제 5.1에서 요소 도심의 x좌표는 $x_c=r_0 \sin \alpha/a$ 이다. 여기서, 공식의 r_0 을 dr_0 로 대체시켰다. 따라서 식 (5.5a)의 첫 번째 식으로부터

$$[A\bar{x} = \int x_c dA] \quad \frac{2a}{2\pi} (\pi r^2) \bar{x} = \int_0^{\pi} \left(\frac{r_0 \sin \alpha}{a} \right) (2r_0 dr_0 d\theta)$$

$$r^2 a \bar{x} = \frac{2}{3} r^3 \sin \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{a}$$



2019-04-18

Chap5-a

22

[풀이] 꼭지점에 대하여 삼각 미분면적을 부채꼴의 전각도에 대하여 돌림으로써 전체면적으로 고려될 수 있다. 그림에서와 같은 삼각형 면적은 고차항을 무시하면 $dA=(\pi/2)r^2 d\alpha$ 이다. 예제 5.2로부터 요소 도심의 x좌표는 삼각형 요소의 꼭지점으로부터 높이의 2/3이므로 $x_c=2/3 r \cos \alpha$ 이다. 식 (5.5a)의 첫 번째 식을 사용하면

$$[A\bar{x} = \int x_c dA] \quad (r^2 a) \bar{x} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{2}{3} r \cos \alpha \right) \frac{1}{2} r^2 d\alpha$$

$$r^2 a \bar{x} = \frac{2}{3} r^3 \sin \alpha$$

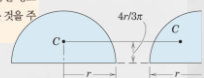
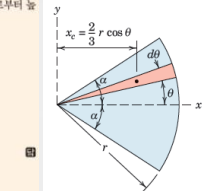
이므로 앞에서와 같이

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{a}$$

이다.

$2a = \pi$ 인 반원 면적에 대해서는 $\bar{x}=4r/3\pi$ 를 얻는다. 그림과 같은 경우 4분원 면적에 대해서도 같은 결과를 적용할 수 있다.

2차요소 $r_0 dr_0 d\theta$ 를 택할 경우, ②에 관하여 한 번 적분한 것은 풀이 I에서 사용한 밑소가 된다. 한편 r_0 에 관하여 적분한 것은 풀이 II에서 사용한 삼각요소가 된다는 것을 주목하기 바란다.



2019-04-18

Chap5-a

23

예제 5.4

$x=0$ 에서부터 $x=a$ 까지의 곡선 $x=ky^3$ 아래의 면적도심을 구하라.

[풀이] 그림과 같이 수직 미소 면적요소를 취한다. 도심의 x좌표를 식 (5.5a)의 첫 번째 식으로 구하면,

$$[A\bar{x} = \int x_c dA] \quad \bar{x} \int_0^a y dy = \int_0^a xy dy$$

$$y=(x/k)^{1/3} \text{과 } k=a/b^3 \text{을 대입하여 적분하면}$$

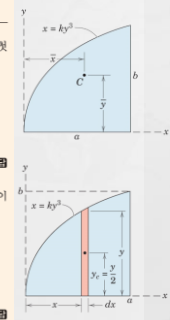
$$\frac{3ab}{4} \bar{x} = \frac{3a^2 b}{7} \quad \bar{x} = \frac{4}{7} a$$

식 (5.5a)의 두 번째 식으로부터 구하는 데 직사각형 요소의 도심좌표는 $x_c=y/2$ 이다. y 는 곡선식 $x=ky^3$ 에 의한 미의 높이이다. 따라서 모멘트 원리에 의하여

$$[A\bar{y} = \int y_c dA] \quad \frac{3ab}{4} \bar{y} = \int_0^a \left(\frac{y}{2} \right) y dy$$

$$y=b(x/a)^{1/3} \text{을 대입하여 적분하면}$$

$$\frac{3ab}{4} \bar{y} = \frac{2ab^2}{10} \quad \bar{y} = \frac{2}{5} b$$



2019-04-18

Chap5-a

24

|풀이 III| 수직요소 대신 아래 그림과 같은 수평요소를 사용할 수도 있다. 직사각요소
의 중심의 x좌표는 양끝 점의 평균좌표 $x_c = x + \frac{1}{2}(a-x) = (a+x)/2$ 이다. 따라서

$$[A\bar{x} = \int x_c dA] \quad \bar{x} \int_0^b (a-x) dy = \int_0^b \left(\frac{a+x}{2}\right)(a-x) dy$$

↖ 앞은

$$[A\bar{y} = \int y_c dA] \quad \bar{y} \int_0^b (a-x) dy = \int_0^b y(a-x) dy$$

수평면에서 $y_c = y$ 이다. 이들 적분을 계산하여 앞에서 구한 $\bar{x}$ 와 $\bar{y}$ 를 검산할 수 있다.

2019-04-18 Chap5-a 25

예제 5.5
반구 체적. 반지름 r 인 반구의 밑면에 대한 체적의 도심 위치를 구하라.

|풀이 II| 대칭에 의해 축을 $\bar{z}=0$ 이 되도록 잡는다. 가장 편리한 요소는 $x-z$ 평면
과 평행한 두께 dy 의 얇은 원형 요소이다. 반구는 $y^2+z^2=r^2$ 의 원이 있는 $y-x$ 평면을 교
차하므로 원반의 반지름은 $z = +\sqrt{r^2-y^2}$ 이다. 요소면의 체적은

$$dV = \pi(r^2 - y^2) dy$$

식 (5.6a)의 두 번째 식으로부터

$$[V\bar{y} = \int y_c dV] \quad \bar{y} \int_0^r \pi(r^2 - y^2) dy = \int_0^r y\pi(r^2 - y^2) dy$$

여기서 $y_c = y$ 이다. 적분을 하면

$$\frac{2}{3}\pi r^2 \bar{y} = \frac{\pi}{4} r^4 \quad \bar{y} = \frac{3}{8} r$$

2019-04-18 Chap5-a 26

|풀이 II| 한편 아래 그림과 같이 길이 y , 반지름 x 두께 dx 인 원통형을 미소요소로
사용할 수 있다. 쉘의 반지름을 0에서 r 까지 확장시키므로 총 체적을 고려할 수 있다.
대칭으로 요소 쉘의 도심은 그 중심이므로 $y_c = y/2$ 이다. 요소 체적은 $dV = (2\pi x dy)(y)$ 이
다. 한방정식으로부터 y 를 x 로 표현하면, $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ 이다. 반구 체적을 풀이 I에서
계산한 값 $\frac{2}{3}\pi r^3$ 을 이용하고 식 (5.6a)의 두 번째 식에 대입하면

$$[V\bar{y} = \int y_c dV] \quad \left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)\bar{y} = \int_0^r \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{2} (2\pi x \sqrt{r^2 - x^2}) dx$$

$$= \int_0^r \pi x(r^2 - x^2) dx = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{8} r$$

풀이 I과 II는 각각 단순한 형태의 요소이고 단지 하나의 변수에 관한 적분이므로 양쪽 두
방법 모두 자주 이용된다.

|풀이 III| 또 다른 한 방법으로 0에서 $\pi/2$ 까지의 변수로서 각도 θ 를 사용할 수 있다.
각 요소의 반지름은 $r \sin \theta$ 이고 얇은 판의 두께는 $dy = (r d\theta) \sin \theta$ 이고 쉘의 두께는 $dz =$
 $(r d\theta) \cos \theta$ 이다. 쉘의 길이는 $y = r \cos \theta$ 이다.

2019-04-18 Chap5-a 27

풀이 II). 변수 y, z 대신에 θ 를 사용

$$dV = \pi r^2 \sin^2 \theta r d\theta \sin \theta$$

$$= \pi r^3 \sin^3 \theta d\theta$$

$$[V\bar{y} = \int y_c dV] \quad \bar{y} \int_0^{\pi/2} \pi r^3 \sin^3 \theta \cos \theta d\theta$$

$$(\sin \theta = \phi, \theta = 0, \phi = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 1)$$

$$= \pi r^3 \int_0^1 \phi^3 d\phi = \frac{1}{4} \pi r^4$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{3}{8} r$$

2019-04-18 Chap5-a 28

5.4 복합물체와 형상 : 근사방법

복합물체

- 재료 혹은 형상이 서로 다른 부분들이 결합되어 이루어진 복합물체의 경우:
각 부분들의 질량중심을 알고 있으면, 모멘트 원리를 적용하여 적분 없이
복합물체의 질량중심을 구할 수 있다.

$$(m_1 + m_2 + m_3)\bar{X} = m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3$$

복합물체의 질량중심

$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} \quad \bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \quad \bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m}$$

(5.7)

2019-04-18 Chap5-a 29

① $m \rightarrow L, A, \bar{V}$ 대입.

② 빈 공간 (Cavity), 기명 : (-)의 값으로 간주.

③ 간단하지 않거나 수학적으로 풀이 불가능한 경우
→ 근사 방법 : 모서리 값을 수록 정확도 증가.

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax_c}{\sum A} \quad \bar{y} = \frac{\sum Ay_c}{\sum A}$$

2019-04-18 Chap5-a 30

부정형 체적의 중심 → 면적의 중심문제 귀착 (3차원) (2차원)

$\Delta V = A \Delta x$

$\bar{x}$

x

Δx

$\bar{x}$

x

Δx

A

C

2019-04-18 Chap5-a 31

예제 5.6

음영면적의 중심을 구하라.

[풀이] 면적은 아래에 있는 그림과 같이 4개의 기본적인 도형으로 나뉜다. 이러한 모든 도형들의 중심은 표 D.3에서 구할 수 있다. 구별(부분 3과 4)의 면적은 다음의 표에서 음의 값으로 취급됨을 주의하라.

부분	A mm ²	$\bar{x}$ mm	$\bar{y}$ mm	$\bar{x}A$ mm ³	$\bar{y}A$ mm ³
1	12 000	60	50	720 000	600 000
2	3000	140	100/3	420 000	100 000
3	-1414	60	12.73	-84 800	-18 000
4	-800	120	40	-96 000	-32 000
계	12 790			959 000	650 000

식 (5.7)을 이용하여 구하면

$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{959\,000}{12\,790} = 75.0 \text{ mm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{650\,000}{12\,790} = 50.8 \text{ mm}$$

2019-04-18 Chap5-a 32

예제 5.7

그림과 같이 길이가 1 m이고 단면적이 x 에 따라 변하는 물체의 체적도심의 x 좌표를 근사적으로 구하라.

[풀이] 물체를 다섯 부분으로 나누고 각각의 평면면적, 체적 그리고 도심의 위치를 구하여 아래 표에 적어 넣는다.

부분	A m ²	체적 V m ³	$\bar{x}$ m	$V\bar{x}$ m ⁴
0-0.2	3	0.6	0.1	0.060
0.2-0.4	4.5	0.90	0.3	0.270
0.4-0.6	5.2	1.04	0.5	0.520
0.6-0.8	5.2	1.04	0.7	0.728
0.8-1.0	4.5	0.90	0.9	0.810
계	4.48			2.388

$$\bar{X} = \frac{\sum V\bar{x}}{\sum V} = \frac{2.388}{4.48} = 0.533 \text{ m}$$

2019-04-18 Chap5-a 33

예제 5.8

브래킷과 축으로 된 결합체의 질량중심 위치를 구하라. 수직면은 25 kg/m²의 질량을 가진 판금속이고, 수평면의 재료는 40 kg/m²의 질량을 가진 것이며, 강봉의 밀도는 7.83 Mg/m³이다.

[풀이] 복합물체가 아홉 부분과 같이 5개의 요소로 이루어진 것으로 생각하자. 삼각 부분은 음의 질량을 갖는 것으로 한다. 그림에 그려진 기준축에 대하여 대칭이므로 질량중심의 x 좌표는 0이 분명하다.

각 부분의 질량은 쉽게 계산할 수 있으므로 더 이상의 설명은 필요 없을 것이다. 부품 1에 대하여는 예제 5.3으로부터

$$z = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(50)}{3\pi} = 21.2 \text{ mm}$$

부품 3은 예제 5.2로부터 삼각 질량의 도심이 밑변으로부터 높이 1/3임을 알 수 있다. 좌표축으로부터는 z 값이 다음과 같다.

$$z = -[150 - 25 - \frac{1}{3}(75)] = -100 \text{ mm}$$

나머지 부분의 질량중심 y 와 z 좌표는 눈으로 쉽게 알 수 있다. 식 (5.7)을 적용하는 데 관련된 항들은 다음과 같은 표를 작성함으로써 편리하게 다룰 수 있다.

2019-04-18 Chap5-a 34

부분	m kg	$\bar{y}$ mm	$\bar{z}$ mm	$m\bar{y}$ kg·mm	$m\bar{z}$ kg·mm
1	0.098	0	21.2	0	2.08
2	0.562	0	-75.0	0	-42.19
3	-0.094	0	-100.0	0	9.38
4	0.600	50.0	-150.0	30.0	-90.00
5	1.476	75.0	0	110.7	0
계	2.642			140.7	-120.73

이제 식 (5.7)을 적용하여 결과를 구하면

$$\bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} = \frac{140.7}{2.642} = 53.3 \text{ mm}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} = \frac{-120.73}{2.642} = -45.7 \text{ mm}$$

2019-04-18 Chap5-a 35

5.5 파푸스(Pappus) 정리

제1 정리: 면적

한 평면곡선을 같은 평면에 있으면서 그 곡선과 교차하지 않는 축에 관하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 표면적을 계산할 때 사용

회전체의 표면적 = (곡선의 도심이 회전하면서 이동한 거리) × (곡선의 길이)

- 회전 각도가 2π 일 때:

$$A = 2\pi \bar{y} L \quad (5.5)$$

$dA = 2\pi \bar{y} dL$

$$A = \int dA = 2\pi \int \bar{y} dL$$

but, $\bar{y} L = \int \bar{y} dL$ for line

$$\therefore A = 2\pi \bar{y} L \leftarrow \text{Pappus Theorem 1 for area}$$

- 회전 각도가 θ 일 때:

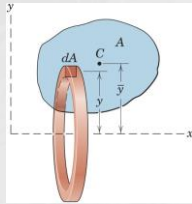
$$A = \theta \bar{y} L \quad (5.5a)$$

2019-04-18 Chap5-a 36

제2정리: 체적

한 면적을 같은 평면에 있으면서 그 평면과 교차하지 않는 곡에 관하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 체적을 계산할 때 사용

회전체의 체적 = (면적의 도심이 회전하면서 이동한 거리) $\times$ (면적)



- 회전 각도가 2π 일 때:

$$V = 2\pi \bar{y}A \quad (5.9)$$

$$dV = 2\pi y dA$$

$$V = \int dV = 2\pi \int y dA$$

$$\text{but, } \bar{y}A = \int y dA \text{ for area}$$

$$\therefore V = 2\pi \bar{y}A \leftarrow \text{Pappus Theorem 2 for volume}$$

- 회전 각도가 θ 일 때:

$$V = \theta \bar{y}A \quad (5.9a)$$

2019-04-18

Chap5-a

37

*) 어떤 곡에 대하여 θ 만큼 회전시켰을 때 (θ 는 radian)

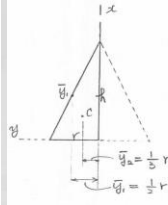
$$A = \theta \bar{y}L$$

$$(5/8a)$$

$$V = \theta \bar{y}A$$

$$(5/9a)$$

(예제 5.9) 밑면의 반경이 r 이고 높이가 h 인 각각 삼각형의 밑면적과 부피



$$A = 2\pi \bar{y} \cdot L = 2\pi \cdot \frac{r}{3} \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$V = 2\pi \bar{y} \cdot A = 2\pi \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{1}{2} r h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



2019-04-18

Chap5-a

38

예제 5.9

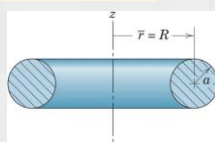
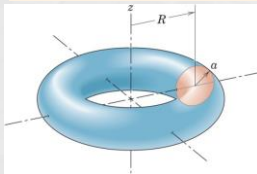
다음 원단면을 가진 링의 체적 V 와 단면적 A 를 구하라.

|풀이| 링은 z -축을 중심으로 원단면을 360° 회전시켜 만들어진 것이다. 식 (5.9a)를 이용하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$V = \theta \bar{y}A = 2\pi(R)(\pi a^2) = 2\pi^2 R a^2$$

유사하게, 식 (5.8a)를 이용하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$A = \theta \bar{r}L = 2\pi(R)(2\pi a) = 4\pi^2 R a$$



2019-04-18

Chap5-a

39

예제 5.10

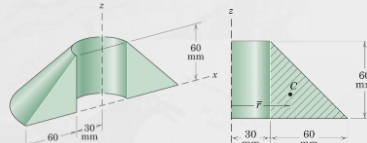
60 mm 높이의 삼각형을 z -축을 기준으로 180° 회전시켜 만든 고체의 체적 V 를 계산하라. 만약 고체가 강철로 되어 있다면 질량 m 은 얼마겠는가?

|풀이| $\theta = 180^\circ$ 이므로, 식 (5.9a)를 이용하여 다음 식을 구할 수 있다.

$$V = \theta \bar{y}A = \pi(30 + \frac{1}{3}(60))(\frac{1}{2}(60)(60)) = 2.83(10^3) \text{ mm}^3$$

위 고체의 질량은 다음과 같다.

$$m = \rho V = \left[7830 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] [2.83(10^3) \text{ mm}^3] \left[\frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} \right]^3 = 2.21 \text{ kg}$$



2019-04-18

Chap5-a

40